O Zanurzeniach Algebr Entropicznych

Obrona Rozprawy Doktorskiej

Michał Stronkowski

Promotor: prof. Anna Romanowska

Politechnika Warszawska

Warszawa 27 marca 2007

Problem

Problem

Czy każda algebra modowa jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem?

Problem

Problem

Czy każda algebra modowa jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem?

Problem II

Które algebry entropiczne są podreduktami (pół)modułów nad przemiennymi (pół)pierścieniami?

Co wiedzieliśmy

Twierdzenie (Ježek '79)

Każda algebra bez stałych jest podreduktem półmodułu.

Co wiedzieliśmy

Twierdzenie (Ježek '79)

Każda algebra bez stałych jest podreduktem półmodułu.

Twierdzenie (Ježek i Kepka '81)

Niech $(A, \cdot)$ będzie grupoidem entropicznym takim, że $A \cdot A = A$. Wtedy istnieją przemienny monoid $(M, +, 0)$ i dwa jego automorfizmy f, g takie, że

1. $G \subseteq M$,
2. $f \circ g = g \circ f$,
3. dla dowolnych $a, b \in A$ mamy $a \cdot b = f(a) + g(b)$.

Co wiedzieliśmy

Twierdzenie (Ježek '79)

Każda algebra bez stałych jest podreduktem półmodułu.

Twierdzenie (Ježek i Kepka '81)

Niech $(A,\cdot)$ będzie grupoidem entropicznym takim, że $A \cdot A = A$. Wtedy istnieją przemienny monoid $(M,+,0)$ i dwa jego automorfizmy f, g takie, że

1. $G \subseteq M$,
2. $f \circ g = g \circ f$,
3. dla dowolnych $a, b \in A$ mamy $a \cdot b = f(a) + g(b)$.

Twierdzenie (Romanowska i Smith '01)

Każda skracalna algebra modowa jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Algebry entropiczne

Algebra (A, Ω) jest entropiczna, jeśli spełnia wszystkie równości

$$\mu(\nu(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, \nu(x_1^m, \dots, x_n^m)) \\ \approx \nu(\mu(x_1^1, \dots, x_1^m), \dots, \mu(x_n^1, \dots, x_n^m))$$

dla $\mu, \nu \in \Omega$.

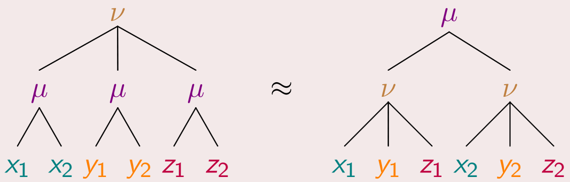
Algebry entropiczne

Algebra (A, Ω) jest entropiczna, jeśli spełnia wszystkie równości

$$\mu(\nu(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, \nu(x_1^m, \dots, x_n^m)) \approx \nu(\mu(x_1^1, \dots, x_1^m), \dots, \mu(x_n^1, \dots, x_n^m))$$

dla $\mu, \nu \in \Omega$.

Przykład



Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami
3. Półkraty

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami
3. Półkraty
4. Półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami
3. Półkraty
4. Półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami
5. Algebry barycentryczne

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami
3. Półkraty
4. Półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami
5. Algebry barycentryczne
6. Przestrzenie afiniczne

Przykłady algebr entropicznych

1. Grupy abelowe
2. Moduły nad przemiennymi pierścieniami
3. Półkraty
4. Półmoduły nad przemiennymi półpierścieniami
5. Algebry barycentryczne
6. Przestrzenie afiniczne

Półkraty, algebry barycentryczne i przestrzenie afiniczne spełniają równości

$$\omega(x, \ldots, x) = x,$$

czyli są algebrami modowymi.

Równości Szendrei

Wszystkie wymienione algebry spełniają równości Szendrei

$$\omega(\omega(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, \omega(x_1^n, \dots, x_n^n)) \\ \approx \omega(\omega(\pi(x_1^1), \dots, \pi(x_n^1)), \dots, \omega(\pi(x_1^n), \dots, \pi(x_n^n))),$$

gdzie π jest transpozycją pewnej ustalonej pary zmiennych x_j^i i x_i^j.

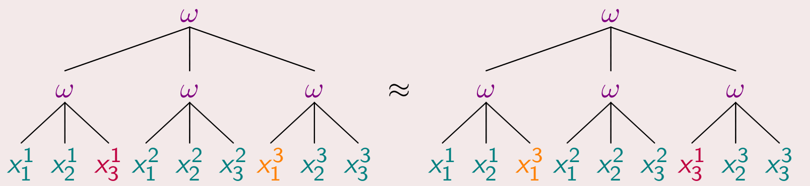
Równości Szendrei

Wszystkie wymienione algebry spełniają równości Szendrei

$$\omega(\omega(x_1^1,\dots,x_n^1),\dots,\omega(x_1^n,\dots,x_n^n))$$
$$\approx \omega(\omega(\pi(x_1^1),\dots,\pi(x_n^1)),\dots,\omega(\pi(x_1^n),\dots,\pi(x_n^n))),$$

gdzie π jest transpozycją pewnej ustalonej pary zmiennych x_j^i i x_i^j.

Przykład: $\pi : x_3^1 \leftrightarrow x_1^3$



Podredukty półmodułów

1. Półpierścień to pierścień bez odejmowania

Przykład: Zbiór $End(M, +, 0)$ endomorfizmów monoidu przemiennego $(M, +, 0)$.

Podredukty półmodułów

1. Półpierścień to pierścień bez odejmowania

Przykład: Zbiór $End(M, +, 0)$ endomorfizmów monoidu przemiennego $(M, +, 0)$.

---

2. Półmoduł to moduł bez odejmowania

Przykład: $(M, +, 0, S)$, gdzie $(M, +, 0)$ jest przemiennym monoidem, a S jest podpółpierścieniem $End(M, +, 0)$.

Podredukty półmodułów

1. Półpierścień to pierścień bez odejmowania

Przykład: Zbiór $End(M, +, 0)$ endomorfizmów monoidu przemiennego $(M, +, 0)$.

---

2. Półmoduł to moduł bez odejmowania

Przykład: $(M, +, 0, S)$, gdzie $(M, +, 0)$ jest przemiennym monoidem, a S jest podpółpierścieniem $End(M, +, 0)$.

---

3. Redukt półmodułu $(M, +, 0, S)$ to algebra (M, Ω), gdzie

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = s_1^\omega x_1 + \cdots + s_n^\omega x_n$$

dla $\omega \in \Omega$ i $s_i^\omega \in S$.

Podredukty półmodułów

1. Półpierścień to pierścień bez odejmowania

Przykład: Zbiór $End(M, +, 0)$ endomorfizmów monoidu przemiennego $(M, +, 0)$.

---

2. Półmoduł to moduł bez odejmowania

Przykład: $(M, +, 0, S)$, gdzie $(M, +, 0)$ jest przemiennym monoidem, a S jest podpółpierścieniem $End(M, +, 0)$.

---

3. Redukt półmodułu $(M, +, 0, S)$ to algebra (M, Ω), gdzie

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = s_1^\omega x_1 + \cdots + s_n^\omega x_n$$

dla $\omega \in \Omega$ i $s_i^\omega \in S$.

---

4. Podredukt to podalgebra reduktu

Przykłady: Wszystkie wymienione algebry entropiczne są podreduktami półmodułów nad przemiennymi półmodułami.

Nie-Szendreiowskie algebry modowe

Twierdzenie

Istnieją algebry modowe nie spełniające równości Szendrei.

Nie-Szendreiowskie algebry modowe

Twierdzenie

Istnieją algebry modowe nie spełniające równości Szendrei.

Dowód pierwszy.

1. Jeśli algebry modowe spełniają równość $t \approx s$, to istnieje dowód tej równości o pewnej szczególnej postaci.

$\square$

Nie-Szendreiowskie algebry modowe

Twierdzenie

Istnieją algebry modowe nie spełniające równości Szendrei.

Dowód pierwszy.

1. Jeśli algebry modowe spełniają równość $t \approx s$, to istnieje dowód tej równości o pewnej szczególnej postaci.
2. Nie istnieje taki dowód równości Szendrei dla opreacji ω o arności większej niż dwa.

□

Nie-Szendreiowskie algebry modowe

Twierdzenie

Istnieją algebry modowe nie spełniające równości Szendrei.

Dowód pierwszy.

1. Jeśli algebry modowe spełniają równość $t \approx s$, to istnieje dowód tej równości o pewnej szczególnej postaci.
2. Nie istnieje taki dowód równości Szendrei dla opreacji ω o arności większej niż dwa.

$\square$

Dowód drugi (D. Stanovský).

Konstrukcja skończonego kontrprzykładu. $\square$

Nie-Szendreiowskie algebry modowe II

Fakt

Podredukty półmodułów nad przemiennymi półpierścieniami spełniają równości Szendrei.

Nie-Szendreiowskie algebry modowe II

Fakt

Podredukty półmodułów nad przemiennymi półpierścieniami spełniają równości Szendrei.

Wniosek

Nie każda algebra modowa jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem.

Podredukty półmodułów

Twierdzenie

Niech (A, Ω) będzie algebrą entropiczną bez stałych taką, że

1. równości Szendrei są w niej spełnione,
2. każda operacja nieunarna $\omega\colon A^n \to A$ jest suriektywna.

Wtedy (A, Ω) jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem.

Podredukty półmodułów

Twierdzenie

Niech (A, Ω) będzie algebrą entropiczną bez stałych taką, że

1. równości Szendrei są w niej spełnione,
2. każda operacja nieunarna $\omega\colon A^n \longrightarrow A$ jest suriektywna.

Wtedy (A, Ω) jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem.

Wniosek

Algebra modowa jest podreduktem półmodułu nad przemiennym półpierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równości Szendrei.

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \dots, a_n) = X_1 a_1 + \dots + X_n a_n.$$

$\square$

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n.$$
2. Algebrze entropicznej (A, ω) przyporządkujemy półmoduł $G(A, \omega) = (F_S(A), +, 0, S)/\Theta$, gdzie

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n.$$
2. Algebrze entropicznej (A, ω) przyporządkujemy półmoduł $G(A, \omega) = (F_S(A), +, 0, S)/\Theta$, gdzie
   1. $(F_S(A), +, 0, S)$ jest wolnym S-półmodułem generowanym przez zbiór A,

□

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n.$$
2. Algebrze entropicznej (A, ω) przyporządkujemy półmoduł $G(A, \omega) = (F_S(A), +, 0, S)/\Theta$, gdzie
    1. $(F_S(A), +, 0, S)$ jest wolnym S-półmodułem generowanym przez zbiór A,
    2. Θ jest kongruencją generowaną przez pary $(\omega(a_1, \ldots, a_n), X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n)$.

□

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \ldots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n.$$
2. Algebrze entropicznej (A, ω) przyporządkujemy półmoduł $G(A, \omega) = (F_S(A), +, 0, S)/\Theta$, gdzie
    1. $(F_S(A), +, 0, S)$ jest wolnym S-półmodułem generowanym przez zbiór A,
    2. Θ jest kongruencją generowaną przez pary $(\omega(a_1, \ldots, a_n), X_1 a_1 + \cdots + X_n a_n)$.
3. G jest funktorem lewosprzężonym do K.

□

Podredukty półmodułów II

Dowód.

1. Niech $S = \mathbb{N}[X_1, \dots, X_n]$. Półmodułowi $(A, +, 0, S)$ przyporządkujemy algebrę entropiczną $K(A, +, 0, S) = (A, \omega)$, gdzie
$$\omega(a_1, \dots, a_n) = X_1 a_1 + \dots + X_n a_n.$$
2. Algebrze entropicznej (A, ω) przyporządkujemy półmoduł $G(A, \omega) = (F_S(A), +, 0, S)/\Theta$, gdzie
   1. $(F_S(A), +, 0, S)$ jest wolnym S-półmodułem generowanym przez zbiór A,
   2. Θ jest kongruencją generowaną przez pary $(\omega(a_1, \dots, a_n), X_1 a_1 + \dots + X_n a_n)$.
3. G jest funktorem lewosprzężonym do K.
4. Θ oddziela elementy z A.

□

Algebry skracalne

Prawo skracalności

$$\omega(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \approx \omega(x_1, \ldots, z, \ldots, x_n) \longrightarrow y \approx z$$

Algebry skracalne

Prawo skracalności

$$\omega(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \approx \omega(x_1, \ldots, z, \ldots, x_n) \longrightarrow y \approx z$$

Algebry skracalne:

Algebry skracalne

Prawo skracalności

$$\omega(x_1, \dots, y, \dots, x_n) \approx \omega(x_1, \dots, z, \dots, x_n) \longrightarrow y \approx z$$

Algebry skracalne:

1. (Quasi)Grupy,

Algebry skracalne

Prawo skracalności

$$\omega(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \approx \omega(x_1, \ldots, z, \ldots, x_n) \longrightarrow y \approx z$$

Algebry skracalne:

1. (Quasi)Grupy,
2. $(R^*, \cdot)$, gdzie R jest dziedziną całkowitości,

Algebry skracalne

Prawo skracalności

$$\omega(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \approx \omega(x_1, \ldots, z, \ldots, x_n) \longrightarrow y \approx z$$

Algebry skracalne:

1. (Quasi)Grupy,
2. $(R^*, \cdot)$, gdzie R jest dziedziną całkowitości,
3. Niech M będzie R-modułem oraz $r_1, \ldots, r_n \in R - \bigcup_{m \in M} Ann(m)$. Jeśli

$$\omega(m_1, \ldots, m_n) = r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n,$$

to algebra (M, ω) jest skracalna.

Poliquasigrupy

W algebrze (A, Ω) mamy dzielenie, jeśli dla dowolnej n-arnej operacji $\omega \in \Omega$ oraz $0 < i \leq n$ zachodzi

$$\forall x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n \ \exists x \quad \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = y.$$

Poliquasigrupy

W algebrze (A, Ω) mamy dzielenie, jeśli dla dowolnej n-arnej operacji $\omega \in \Omega$ oraz $0 < i \leq n$ zachodzi

$$\forall x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n \ \exists x \quad \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = y.$$

Poliquasigrupa to skracalna algebra z dzieleniem.

Poliquasigrupy

W algebrze (A, Ω) mamy dzielenie, jeśli dla dowolnej n-arnej operacji $\omega \in \Omega$ oraz $0 < i \leq n$ zachodzi

$$\forall x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n \; \exists x \quad \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = y.$$

Poliquasigrupa to skracalna algebra z dzieleniem.

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna zanurza się w entropiczną poliquasigrupę.

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Dowód.

1. Skracalną algebrę entropiczną (A, Ω) zanurzamy w entropiczną poliquasigrupę (B, Ω).

$\square$

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Dowód.

1. Skracalną algebrę entropiczną (A, Ω) zanurzamy w entropiczną poliquasigrupę (B, Ω).
2. Jeśli w (B, Ω) istnieje element idempotentny e, to przy użyciu e oraz operacji z Ω możemy na B zbudować strukturę modułu.

$\square$

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Dowód.

1. Skracalną algebrę entropiczną (A, Ω) zanurzamy w entropiczną poliquasigrupę (B, Ω).
2. Jeśli w (B, Ω) istnieje element idempotentny e, to przy użyciu e oraz operacji z Ω możemy na B zbudować strukturę modułu.
3. Jeśli w Ω nie ma stałych, to (B, Ω) jest podreduktem półmodułu $(N, +, 0, S)$.

$\square$

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Dowód.

1. Skracalną algebrę entropiczną (A, Ω) zanurzamy w entropiczną poliquasigrupę (B, Ω).
2. Jeśli w (B, Ω) istnieje element idempotentny e, to przy użyciu e oraz operacji z Ω możemy na B zbudować strukturę modułu.
3. Jeśli w Ω nie ma stałych, to (B, Ω) jest podreduktem półmodułu $(N, +, 0, S)$.

$\square$

Podredukty modułów

Twierdzenie

Każda skracalna algebra entropiczna jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

Dowód.

1. Skracalną algebrę entropiczną (A, Ω) zanurzamy w entropiczną poliquasigrupę (B, Ω).
2. Jeśli w (B, Ω) istnieje element idempotentny e, to przy użyciu e oraz operacji z Ω możemy na B zbudować strukturę modułu.
3. Jeśli w Ω nie ma stałych, to (B, Ω) jest podreduktem półmodułu $(N, +, 0, S)$.
4. Dzięki skracalności półmoduł $(N, +, 0, S)$ jest podreduktem modułu nad przemiennym pierścieniem.

$\square$

Koniec

Dziękuję za uwagę :-)